

一种基于格理论构造高维星座图的方法

吴昊¹, 张建秋¹, 宋汉斌²

(1. 复旦大学信息科学与工程学院, 上海 200433; 2. 上海无线电设备研究所, 上海 200090)

摘要: 星座图的增益指数是格理论中的一个术语, 它可以分解成格的编码增益和星座图边界的成形增益. 本文将最大化星座图增益指数的过程构造为一系列优化问题, 并将星座图的几何特性作为优化问题的约束条件. 由于可通过求解优化问题来得到所需的星座图, 因此本文的方法可以作为一种构造高维星座图的通用方法. 相比现有算法均只适用于星座点个数较少的情况, 本文方法可以简便地构造星座点数目较大的高维星座图. 仿真结果显示: 在星座点数目较少时, 由本文方法所构造的星座图的误符号率性能与最优值十分接近; 而当星座点数目较多时, 本文构造的星座图较传统基于整数格的星座图具有更低的误符号率.

关键词: 高维星座图; 格; 星座图增益指数; 编码增益; 成形增益; 误符号率

中图分类号: TN911.3 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112 (2014)09-1672-08

电子学报 URL: <http://www.ejournal.org.cn>

DOI: 10.3969/j.issn.0372-2112.2014.09.002

A Lattice Based Approach to the Construction of Multi-Dimensional Signal Constellations

WU Hao¹, ZHANG Jian-qi¹, SONG Han-bin²

(1. Institute of Information Science and Engineering, Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Shanghai Radio Equipment Research Institute, Shanghai 200090, China)

Abstract: The constellation figure of merit (CFM), in terms of lattice theory, can be separated into the coding gain of a lattice and the shaping gain of the boundary of a constellation. In this paper, maximizing the CFM of multi-dimensional signal constellations is formulated as a series of optimization problems. The geometric characteristics of signal constellations are taken as the constraints of such problems. Since the desirable signal constellations can be achieved by solving the optimization problems, our approach can serve as a general method of the construction of multi-dimensional signal constellations. In comparison with the fact that the existing methods can only be applied when the number of signal points is small, the proposed approach can construct large size constellations with ease. The simulation results show that the symbol error probabilities (SEP) of small size constellations built by our approach are very close to the optimum and that the proposed large size constellations have better SEPs than the traditional constellations generated by integer lattices.

Key words: multi-dimensional signal constellations; lattice; the constellation figure of merit; coding gain; shaping gain; symbol error probability

1 引言

现今, 电磁波的幅度和相位作为调制参数被广泛地用来传递信息. 然而在光通信领域中, 许多研究^[1~5]均利用了全偏振光的极化状态作为携带信息的新途径. 另一方面, 为了提高无线通信系统的性能, 越来越多的研究^[6~11]将注意力放在利用电磁波极化信息所带来的好处上. Andrews 等人在文献[6]中指出电磁波的极化可以在无线通信系统中带来额外的自由度, 从而提高系统容

量. 文献[7~9]讨论了天线的极化分集, 这类技术是利用电磁波极化信息的一种途径. Nehorai 等人在文献[10]中首次提出了可以对电磁波的幅度、相位和它的两个极化参数同时进行调制来传递信息. 文献[11]基于空间电磁场的数学表达式, 提出了一种在无线通信系统中对电磁波幅度、辅助极化角和极化相位角进行调制的新型三维调制方法. 受到上述工作的激励, 为了匹配整个高维调制解调系统, 高维星座图应当得到设计.

通常, 在加性高斯噪声环境下设计星座图的方法

是:固定星座点间的最小欧氏距离,最小化星座图的平均功率.这样设计的理由在于平均功率小的星座图在信噪比相等时所受到的噪声功率更小,同时由于星座点间最小欧氏距离固定,受到噪声影响小的星座图的误码率性能会更优秀.近年来,许多文献均对如何设计功率节省型的高维星座图进行理论研究^[11~18].文献[12]将星座点视为高维空间中的粒子,通过引入粒子间相互作用力使得各个粒子在空间中移动,再将粒子的总能量作为约束最终得到高维星座图. Agrell 等人在文献[13]和[14]中通过优化星座图的敏感增益(sensitivity gain)设计出星座点个数至多为 32 的功率节省型四维星座图.文献[15]通过最小化星座图的平均功率并将高维星座图星座点间的最小距离作为约束,通过将非凸的二次约束二次规划问题松弛为一系列线性约束的二次规划问题来求解得到高维星座图.但该方法仅适用于星座点个数不多的情况下,否则求解过程会变得十分复杂.在文献[16~18]中, Sloane 等人将高维星座图的设计转化为球状填充(sphere packing)问题,并通过各类方法求出三维和四维空间中功率最节省的星座图.其中,文献[18]分别给出了三维时星座点个数不大于 100 和四维时星座点个数不大于 32 的高维星座图,这些星座图具有理论最低的误符号率.

上述几种构造高维星座图的方法均只适用于星座点个数较少的情况下.当星座点个数较大时,上述方法都没有假设星座图具有某些特殊结构,这便使得设计过程变得过于复杂,从而无法求解.为了解决这一问题,基于格理论来设计高维星座图在近年来得到越来越多的关注.格作为一种数学结构,能够用来具体描述空间中按一定规律排列的点所构成的集合.关于格和基于格的星座图的性质在文献[19~21]中有详细阐述.文献[19]提出了星座图的增益指数(the Constellation Figure of Merit, CFM)这一概念,它反映了基于格的星座图的效率.在星座图的维数不太大时,具有较大 CFM 的星座图具有很低的误符号率. Proakis 等人在文献[21]中证明了 CFM 可以分解成格的编码增益和星座图边界成形增益,并指出分别最大化编码增益和成形增益可以产生具有最大 CFM 值的星座图.然而,据笔者所知,最大化 CFM 的具体实现方法并未被提出.为了填补这一空白,本文将最大化星座图增益指数的过程构造为一系列优化问题,并将星座图的几何特性作为优化问题的约束条件.由于通过求解优化问题便可得到所需的星座图,我们的方法可以作为一种构造高维星座图的通用方法.

2 格与基于格的星座图

格是一种数学结构,它能够用来具体描述空间中

按一定规律排列的点所构成的集合.基于格来设计星座图时,通常会先选取一种格,然后再选取一个包含指定星座点数目的边界.为了能够更方便地描述构造高维星座图的方法,本节将根据文献[21],简要地介绍格和基于格的星座图的一些性质.关于格和基于格的星座图更详细的描述可以参考文献[19~21].

2.1 格的简介

一个 n 维空间中的格是 \mathbf{R}^n 中一离散点集,且该点集具有矢量加法下的群结构^[21].通常,一个 n 维格 Λ 可以由 n 个线性无关的基向量 $\mathbf{g}_i \in \mathbf{R}^n, 1 \leq i \leq n$ 来描述,而格中的任意一点 \mathbf{x} 可以表示成

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{g}_i \quad (1)$$

其中 $a_i \in \mathbf{Z}, i = 1, 2, \dots, n$.另一种描述格 Λ 的方法是通过一个 $n \times n$ 维的生成矩阵 \mathbf{G}, \mathbf{G} 的各行为基向量 $\mathbf{g}_i \in \mathbf{R}^n, 1 \leq i \leq n$.有了上述定义后,格 Λ 中任一格点 \mathbf{x} 可表示为

$$\mathbf{x} = \mathbf{a}\mathbf{G} \quad (2)$$

其中 $\mathbf{a} \in \mathbf{Z}^n$ 是一 n 维整数向量.

定义 1 格 Λ 的最小欧氏距离 d_{\min} 为 Λ 中任意两个格点的最小欧氏距离^[21].

定义 2 格 Λ 的重度 N_{\min} 为 Λ 中与任一给定格点距离为 d_{\min} 的点的个数^[21].

定义 3 格 Λ 的基础体积 $V(\Lambda)$ 为 Λ 中单位体积(或面积)内格点数的倒数^[21].文献[17]证明了对于任意格都有:

$$V(\Lambda) = |\det(\mathbf{G})| \quad (3)$$

2.2 基于格的星座图

在一个基于格的星座图中,若对应格的重度为 N_{\min} ,则在高信噪比的情况下,星座图的误符号率有以下估计式^[21]

$$P_e \approx N_{\min} Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2N_0}}\right) \quad (4)$$

其中, N_0 为加性高斯白噪声的功率.我们可将误符号率估计式改写成

$$P_e \approx N_{\min} Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2E_{\text{avg}/2D}} \frac{E_{\text{avg}/2D}}{N_0}}\right) \quad (5)$$

其中,每二维平均功率 $E_{\text{avg}/2D}$ 表示一个 n 维星座图的平均功率化到二维空间后的值.它可由下式计算

$$E_{\text{avg}/2D} = \frac{2}{n} E_{\text{avg}} = \frac{2}{nM} \sum_{m=1}^M \|\mathbf{x}_m\|^2 \quad (6)$$

其中, M 为 n 维星座图中星座点的个数, \mathbf{x}_m 为表示一个星座点坐标的 n 维向量.通过分析不难发现,由于式(5)根号下第二项为信噪比,则格的重度 N_{\min} 和 $d_{\min}^2/E_{\text{avg}/2D}$ 这两项将决定星座图的误符号率的大小.特

别地,当星座图的维数 n 并不太大时, $d_{\min}^2/E_{\text{avg}/2D}$ 项起主导作用。

定义 4 n 维星座图 C 的增益指数(CFM)为^[21]

$$\text{CFM}(C) = \frac{d_{\min}^2(C)}{E_{\text{avg}/2D}(C)} \quad (7)$$

有了定义 4,设计低误符号率高维星座图的问题就转换为最大化 CFM。由于每二维平均功率 $E_{\text{avg}/2D}$ 的取值与最小欧氏距离 d_{\min} 有关,我们可固定 d_{\min} 来最小化星座图的 $E_{\text{avg}/2D}$ (或平均功率)。

上文曾提到过设计基于格的星座图的过程包括了格和边界的选取,文献[21]中证明了 CFM 可以由下式来表示:

$$\text{CFM}(C) \approx \text{CFM}_0 \cdot \gamma_c(\Lambda) \cdot \gamma_s(R) \quad (8)$$

式中, CFM_0 为星座图基础增益,是一个常数; $\gamma_c(\Lambda)$ 为格 Λ 的编码增益(也称为格的厄米特参量);而 $\gamma_s(R)$ 为边界 R 的成形增益。

基于格设计高维星座图的第一步是选取一个致密的格,而编码增益 $\gamma_c(\Lambda)$ 反映了一个 n 维格 Λ 的疏密程度,其表达式为^[21]

$$\gamma_c(\Lambda) = \frac{d_{\min}^2(\Lambda)}{[V(\Lambda)]^{\frac{2}{n}}} = \frac{d_{\min}^2(\Lambda)}{[|\det(\mathbf{G})|]^{\frac{2}{n}}} \quad (9)$$

其中 \mathbf{G} 是格 Λ 的生成矩阵。由于 $V(\Lambda)$ 表示的是 Λ 中单位体积(或面积)中格点数的倒数,再加之格点间最小欧氏距离 d_{\min} 固定,所以编码增益较大的格会更密。

接着,我们要选取一个包含我们想要的星座点个数的 n 维边界 R 来构成 n 维星座图。我们的目标是在最小欧氏距离 d_{\min} 给定的情况下产生功率节省的星座图,而边界 R 的成形增益 $\gamma_s(R)$ 便可作为边界选取的衡量标准。 n 维空间中一区域 R 的成形增益可由下式表述^[21]

$$\gamma_s(R) = \frac{V(R)^{\frac{2}{n}}}{6E_{\text{avg}/2D}} \quad (10)$$

其中 $V(R)$ 为区域 R 的体积(或面积)。由式(10)我们能发现,具有高成形增益的区域可以提高星座图的功率效率并能够提高系统的性能。另外,文献[21]证明了在所有区域中,球形边界总是拥有最大的成形增益值。

由式(8)可知,任何星座图的 CFM 值均取决于 $\gamma_c(\Lambda)$ 和 $\gamma_s(R)$ 的乘积。格的编码增益 $\gamma_c(\Lambda)$ 仅取决于格的选择。若格点间最小欧氏距离 d_{\min} 固定,更密的格就意味着我们可以在一定的体积(或面积)内摆放更多的星座点。另一方面,边界的成形增益 $\gamma_s(R)$ 仅取决于星座图边界的选取。而具有高成形增益的边界会使得产生的星座图在功率方面更节省。由于星座图的 CFM 值由上述相互独立的两项之间的乘积所决定,故我们可以分别对 $\gamma_c(\Lambda)$ 和 $\gamma_s(R)$ 进行最大化最终来使得

CFM 值最大,这样会使得求解难度大大降低。

3 优化问题的构建

最大化星座图的 CFM 值能够获得误符号率性能优秀的高维星座图,而 CFM 值可以表示成格的编码增益和边界的成形增益之间的乘积。故在本部分,我们将最大化 CFM 值的过程构造为一系列优化问题,通过求解优化问题来设计高维星座图。

3.1 最大化编码增益

由于星座图的 CFM 值可以表示成编码增益和成形增益之间的乘积,而编码增益和成形增益又是相互独立的,所以我们先最大化格的编码增益 $\gamma_c(\Lambda)$,即选取一个最密的格。

假设所需设计的星座图维数为 n ,我们的首要任务就是选择一个具有最大编码增益的 n 维格。不失一般性,若固定格的最小欧氏距离 d_{\min} 为 1,最大化 $\gamma_c(\Lambda)$ 的优化问题便可由下式来描述:

$$\begin{aligned} \arg \max_{\Lambda} \gamma_c(\Lambda) &= \frac{d_{\min}^2(\Lambda)}{[V(\Lambda)]^{\frac{2}{n}}} \\ \text{s.t. } d_{\min} &= 1 \end{aligned} \quad (11)$$

上式可以改写为:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{G}'(\Lambda)} |\det(\mathbf{G}'(\Lambda))| \\ \text{s.t. } d_{\min} &= 1 \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{G}'(\Lambda)$ 为任一 n 维格 Λ 的生成矩阵。若假设格 Λ 的基向量为:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'_1 &= [g'_{11} \quad g'_{12} \quad \cdots \quad g'_{1n}] \\ \mathbf{g}'_2 &= [g'_{21} \quad g'_{22} \quad \cdots \quad g'_{2n}] \\ &\vdots \\ \mathbf{g}'_n &= [g'_{n1} \quad g'_{n2} \quad \cdots \quad g'_{nn}] \end{aligned} \quad (13)$$

那生成矩阵 $\mathbf{G}'(\Lambda)$ 就可以写为:

$$\mathbf{G}'(\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}'_1 \\ \mathbf{g}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{12} & \cdots & g'_{1n} \\ g'_{21} & g'_{22} & \cdots & g'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g'_{n1} & g'_{n2} & \cdots & g'_{nn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n$

其中 x_1, x_2, \dots, x_n 是 n 维空间中笛卡尔坐标系下的 n 根坐标轴。文献[19]中证明了对格进行尺度变化或正交变换后其编码增益不变。同时考虑到生成矩阵 $\mathbf{G}'(\Lambda)$ 的 QL 分解可以看做是对矩阵 $\mathbf{G}'(\Lambda)$ 的各列进行 Gram-Schmidt 正交化的过程^[22],故 $\mathbf{G}'(\Lambda)$ 可表示为:

$$\mathbf{G}'(\Lambda) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{G}(\Lambda) \quad (15)$$

其中, \mathbf{Q} 是一 $n \times n$ 维的正交矩阵; $\mathbf{G}(\Lambda)$ 是一 $n \times n$ 维的下三角矩阵,它可由下式描述:

$$\mathbf{G}(\Lambda) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ g_{21} & g_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \quad (16)$$

由于 \mathbf{Q} 是一个正交矩阵,它对生成矩阵 $\mathbf{G}(\Lambda)$ 的作用是一个正交变换 \mathbf{Q}^{-1} ,因此不会改变其几何特性.那么,优化问题式(12)可被改写为:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_n} & |g_{22} \cdot g_{33} \cdots g_{nn}| \\ \text{s.t. } & d_{\min} = 1 \end{aligned} \quad (17)$$

不失一般性,我们可以假定 $\mathbf{G}(\Lambda)$ 的对角元素均为正实数,而 $\mathbf{G}(\Lambda)$ 中的其他元素均为非负实数.另外,若我们将式(17)的约束条件用线性无关的基向量 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ 来表示的话,优化问题可改写为:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_n} & g_{22} \cdot g_{33} \cdots g_{nn} \\ \text{s.t. } & \begin{cases} g_{22}, g_{33}, \dots, g_{nn} > 0 \\ g_{21}, g_{31}, g_{32}, \dots, g_{n1}, \dots, g_{n(n-1)} \geq 0 \\ |\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_2| = \dots = |\mathbf{g}_n| = 1 \\ |a_1 \mathbf{g}_1 + a_2 \mathbf{g}_2 + \dots + a_n \mathbf{g}_n| \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \{0, \pm 1\}$,这使得优化问题式(18)中最后一个约束条件变为一系列不等式约束.而这些不等式约束中会存在冗余,但去除它们并不复杂.以三维星座图设计为例,在去除了冗余约束条件后,优化问题式(18)变为:

$$\begin{aligned} \arg \min_{\mathbf{g}_1 \sim \mathbf{g}_3} & g_{22} \cdot g_{33} \\ \text{s.t. } & \begin{cases} g_{22}, g_{33} > 0 \\ g_{21}, g_{31}, g_{32} \geq 0 \\ |\mathbf{g}_1| = |\mathbf{g}_2| = |\mathbf{g}_3| = 1 \\ |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_2| \geq 1, |\mathbf{g}_1 - \mathbf{g}_3| \geq 1, |\mathbf{g}_2 - \mathbf{g}_3| \geq 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

形如式(19)的优化问题属于非线性规划问题,可以通过内点法进行求解,算法复杂度的分析可参见^[23].使用内点法求得问题式(19)的解为:

$$\mathbf{G}(A_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \end{bmatrix} \quad (20)$$

即在格点间最小欧氏距离固定 d_{\min} 为 1 时,由矩阵 $\mathbf{G}(A_3)$ 生成的格 A_3 在所有三维格中具有最大的编码增益(即最密).类似地,当所需设计的星座图维数为 4 时,通过求解式(18)所得到的格其生成矩阵可以表示为:

$$\mathbf{G}(D_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

上述结果均与文献[17]中给出的结果相符合.这便

可以说明,通过求解式(18)可以系统地求得任意维度中最为致密的格.

3.2 成形增益:球形边界的获取

本文第二部分曾经提到,球形边界的成形增益是在所有 n 维边界中最大的.故本文接下来将讨论为一个 n 维空间中给定格选取球型边界的方法.

一种获取球型边界直观但粗糙的方法是逐渐增大圆心位于 n 维空间中原点处的超球的半径,直至其包含我们所需星座点的数目 M .不幸的是,这一方法对大多数 M 并不适用.然而,任何格中格点的模长都是一个非负实离散序列 $(r_1, r_2, \dots, r_i, \dots)$ 且 $0 < r_1 < r_2 < \dots < r_i < \dots$,也就是说 n 维格中的格点可以看成是分布在不同半径的 n 维球壳上的.若令 $n(r_i)$ 为格中模长为 r_i 的格点个数,根据文献[17], $n(r_i)$ 的值可以通过求取格所对应的 theta 序列来确定.由于格点是分布在不同半径的球壳上,则选取球型边界的过程可以等效为在最外层(假设为第 K 层)球壳 $n(r_K)$ 个格点中选取 $N = M - \sum_{i=1}^{K-1} n(r_i)$ 个格点,使得选取格点数符合星座点总数的要求.同时,为了使星座图误符号率最低,最外层球壳中格点的选取应当保证两两格点间的欧氏距离最大.有了上述结论,以超球为边界从给定的 n 维格 Λ 中选取 M 个星座点的过程可用优化问题描述为:

$$\begin{aligned} \arg \max_{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N} & d_{\min}^K \\ \text{s.t. } & \begin{cases} \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbf{R}^n \\ \|\mathbf{x}_i\| = r_K \\ \mathbf{x}_i = \mathbf{G}\mathbf{w}_i \\ \mathbf{w}_i \in \mathbf{Z}^n, i = 1, 2, \dots, N \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ 表示从最外层球壳 $n(r_K)$ 个格点中选取的 $N = M - \sum_{i=1}^{K-1} n(r_i)$ 个格点, d_{\min}^K 表示 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ 这 N 个格点之间的最小欧氏距离, \mathbf{G} 为格 Λ 的生成矩阵.问题式(22)的约束条件使得选取的 N 个点位于 n 维格 Λ 第 K 层球壳上.

虽然从给定的 n 维格 Λ 中构造 M 点星座图的过程可以描述为式(22),但该优化问题是一个整数规划问题.由于整数规划问题为 NP-hard 问题,因此当星座图的维数 n 或星座点数 M 较大时,求解上述问题会变得十分困难.针对这一问题,本文接下来将介绍一种简化求解方法.

文献[12]设计星座图的方法是将星座点视为粒子,通过引入粒子间相互作用力使得各个粒子在空间中自由移动,再将粒子的总能量作为约束最终得到高维星座图.受其启发,我们将最外层球壳中待选取的 N 个格点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$ 视为 N 个质点,而质点之间存在相互作

用力. 每个质点根据自身所受的合力的方向和大小进行一次移动, 移动的范围是最外层球壳中相邻的格点. 各质点移动后再次计算相互作用力, 并根据所受合力进行下一次移动, 如此往复迭代. 在算法中, 步骤 1 到步骤 2 为初始化; 步骤 3 到步骤 7 为迭代过程, 具体的算法步骤为:

步骤 1 为最外层球壳的每个格点 y_i , $i = 1, 2, \dots, n(r_K)$ 在该层球壳中找到与之距离最近的 $2n$ 个格点, 记做 y_{ij} , $j = 1, 2, \dots, 2n$;

步骤 2 对每个最外层格点 y_i 计算 $2n$ 个移动单位向量:

$$v_{ij} = \frac{y_{ij} - y_i}{\|y_{ij} - y_i\|} \quad (23)$$

步骤 3 从最外层球壳 $n(r_K)$ 个格点中随机选取 N 个作为初始质点, 记做 x_i , $i = 1, 2, \dots, N$;

步骤 4 计算 N 个质点相互之间的作用力, 如 x_i 对于 x_j 的作用力为:

$$f_{ij} = \alpha \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|^\beta} \quad (24)$$

其中 α 和 β 为可调参数. 一般, 基于质点的物理性质可取 $\alpha = 1, \beta = 2$;

步骤 5 计算每个质点 x_i 所受合力:

$$F_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N f_{ij} \quad (25)$$

步骤 6 对于每个质点 x_i , 将其所受合力 F_i 分别与其 $2n$ 个移动单位向量 v_{ij} 求内积, 并求出结果的最大值. 如果最大值大于 0, 则质点 x_i 移动至对应移动单位向量方向上的相邻格点, 反之则质点 x_i 不移动;

步骤 7 若 N 个质点在步骤(6)中均未移动或迭代次数到达上限, 则将此时的 x_i , $i = 1, 2, \dots, N$ 作为最终结果. 而当上述条件不满足时, 回到步骤(4)继续迭代.

衡量一个算法的复杂度通常是以整个过程中乘法运算次数作为标准, 本文接下来将对提出的简化算法的复杂度进行分析. 令算法过程中迭代次数为 L , 步骤 1 中需要计算 $n(r_K)$ 个格点间的距离, 所需的乘法次数约为: $n \cdot n(r_K)^2/2$; 步骤 2 和 4 中都需要计算 n 维向量的模, 但这些向量的模均为最外层球壳中格点间的距离, 故这两步无需额外的复杂度; 步骤 6 中要求 n 维向量间的内积, 所需的乘法次数约为: $2L \cdot N \cdot n^2$. 需要指出的是, 我们在仿真过程中发现随机选取的 N 个质点往往只需经过几次迭代就会移动至稳定状态, 所以迭代次数 L 通常较小. 同时, 考虑到星座图的维数 n 也远小于 $n(r_K)$ 和 N , 故本文提出的简化算法复杂度至多为 $O(n(r_K)^2)$.

本文提出的迭代算法是一种求解优化问题式(22)的简化方法, 其解的性能会受初始质点选取的影响. 为了保证本文算法的解在高概率下就是原问题的解, 一

种有效的方法就是重复算法步骤的迭代过程(即步骤 3 至 7), 分别计算每次结果的 d_{\min}^K , 取其中的最大值所对应的那些质点作为最终高维星座图的最外层星座点.

至此, 本文所提出的设计 n 维星座图的方法首先通过求解非线性规划问题式(19)来获取 n 维空间中最为致密的格, 然后使用迭代算法求解整数规划问题式(22)来选取指定数目的星座点. 问题式(19)可通过内点算法进行求解, 其算法复杂度为星座图维度 n 的多项式, 同时考虑到 n 一般远小于最外层球壳格点数 $n(r_K)$, 故本文设计高维星座图算法的复杂度取决于求解问题式(22)的复杂度, 即 $O(n(r_K)^2)$. 在本文第一部分介绍的高维星座图设计方法中, 大部分都是通过求解一个非凸的带有二次约束的二次规划问题. 文献[15]指出这类问题不能在关于星座图维度 n 与星座点个数 M 的多项式时间内求解, 并对此提出了一种复杂度为 $O\left(\left(1 + \frac{M(M-1)}{2}\right)^{1/2}((n+1)^2 + 2M(M-1))\right)$ 的设计方法. 比较该算法与本文算法复杂度, 并考虑到在绝大多数情况下存在 $n \ll n(r_K) < M$. 所以, 本文算法在复杂度方面具有一定的优势.

图 1 所示的星座图就是使用本文提出的算法设计得到的三维 64 点和 128 点星座图.

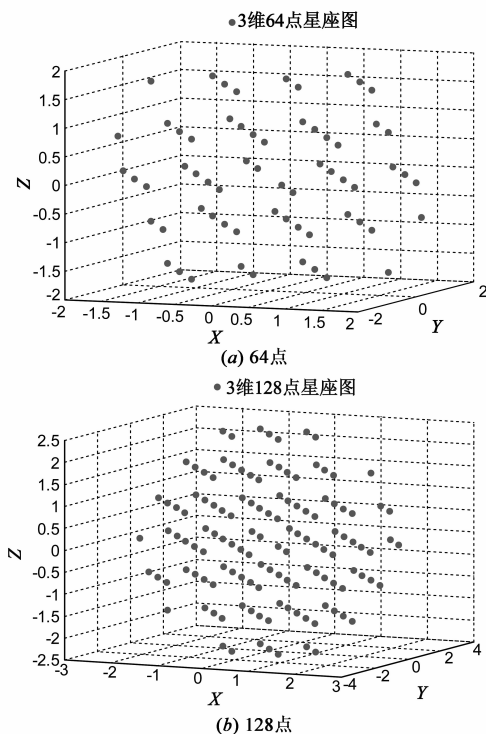


图 1 本文方法构造的三维星座图

4 仿真结果与分析

在本部分, 我们将评估用本文提出方法所产生的

高维星座图的性能.需要指出的是,仿真部分将不包含维度大于4的星座图.原因基于以下两点:首先,维度大于4的星座图目前只有在光通信领域中部分特殊场景下才具有实际使用价值;另外,缺乏四维以上的高维星座图作为比较对象也是原因之一.

在仿真过程中,我们生成长度为 L 的随机符号序列作为发送信号.每个符号都取自于一个给定的高维星座图,并且要求所有星座图的最小欧氏距离 d_{\min} 都等于 1.接收端受到功率为 N_0 的高斯加性白噪声的影响,且接收端将采用最大似然法进行符号检测.

文献[18]给出了当星座点数目较小时三维和四维功率最节省的星座图,这些星座图在误符号率性能方面是最优的.虽然本文提出的构造方法主要针对星座点数目较大的情况,但我们将通过仿真结果表明:使用本文方法设计得到的高维星座图在星座点数目较小的情况下仍具有很低的误符号率.图 2 比较了本文与文献[18]所构造的三维星座图的误符号率性能,而图 3 则比较了四维星座图.从图 2 和图 3 所示的结果可以发现:随着星座图的维度和星座点个数的增加,由本文方法构造得到的高维星座图其误符号率与理论最优值越来越接近.

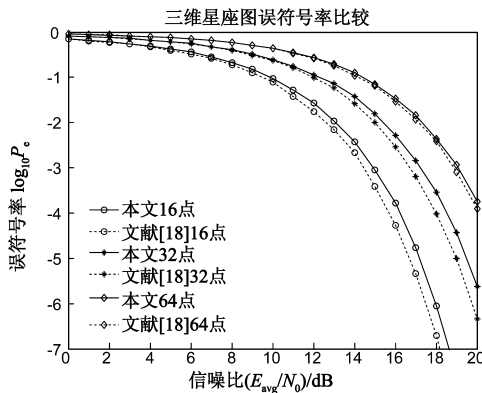


图2 三维星座图误符号率对比

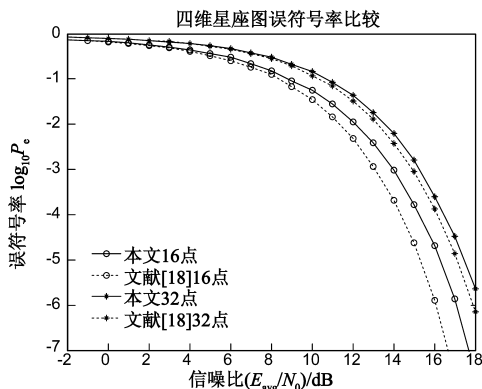


图3 四维星座图误符号率对比

当高维星座图星座点数目较大时,现有通过优化星座图功率的设计方法由于复杂度过高而无法使用,故本文将通过与“高维 QAM”星座图进行比较来衡量本文方法提出的高维星座图的性能.所谓的高维 QAM 星座图是指将二维 2^n 点 QAM 星座图通过类比构造或自身进行笛卡尔积等方法构造得到的高维星座图.例如,我们可类比 64-QAM 星座图构造三维空间中 $8 \times 8 \times 8 = 512$ 点星座图,或者我们可以对 32-QAM 星座图自身进行笛卡尔积得到四维空间中 $32 \times 32 = 1024$ 点星座图.由图 4 可以发现,传统的 QAM 星座图可以看作是由二维空间中生成矩阵为单位阵的整数格经过平移后得到的.类似地,高维 QAM 星座图也可认为是通过高维整数格所构造的.

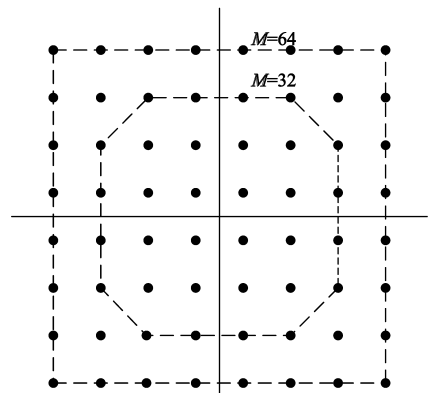


图4 二维QAM星座图

图 5 分别给出了通过本文方法构造的高维星座图与三维 512-QAM 和四维 1024-QAM 误符号率的比较结果.

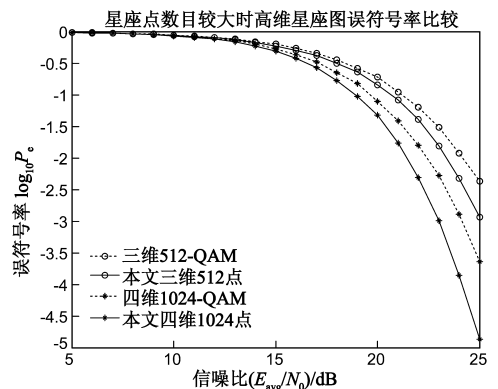


图5 星座点数目较大时高维星座图误符号率对比

从结果可发现,本文构造的星座图较传统基于整数格的高维 QAM 星座图在误符号率性能方面具有显著的优势.其原因在于:观察式(5)和式(7),可以发现高维星座图的误符号率性能取决于星座图的 CFM 值,而 CFM 又可以分解为格的编码增益 $\gamma_c(\Lambda)$ 和星座图边界

的成形增益 $\gamma_s(R)$ 的乘积. 由于本文提出的方法是通过最大化 $\gamma_c(\Delta)$ 和 $\gamma_s(R)$ (即最大化 CFM) 来设计高维星座图, 故其误符号率性能优于高维 QAM 星座图. 表 1 分别给出了图(5)与图(6)中所示星座图的基本参数, 表中数据反映出: 当所有星座图中星座点间的最小欧氏距离均为 1 时, 具有较大 CFM 值的星座图的平均功率更小, 那么这些星座图在信噪比相等时所受到的噪声功率更小, 最终使得它们的误码率性能更优秀. 这也从另一方面解释了用本文方法设计得到的星座图性能更好的原因.

表 1 高维星座图的一些基本参数

维度	三维		四维	
	星座图	512-QAM	本文方法 512点	1024-QAM
d_{\min}	1	1	1	1
编码增益 $\gamma_c(\Delta)$	1	1.26	1	1.41
成形增益 $\gamma_s(R)$	0.78	1.05	0.83	1.09
CFM	$0.78 \cdot \text{CFM}_0$	$1.32 \cdot \text{CFM}_0$	$0.83 \cdot \text{CFM}_0$	$1.54 \cdot \text{CFM}_0$
平均功率 E_{avg}	15.75	11.80	10	6.81

5 总结

本文提出了一种基于格并运用最优规划来构造高维星座图的方法. 该方法将最大化星座图增益指数的过程构造为一系列优化问题, 并将星座图的几何特性作为优化问题的约束条件. 星座图的增益指数可以分解为编码增益和成形增益, 其中最大化格的编码增益保证了星座点选自于一个致密的格, 而最大化边界的成形增益确保了产生的星座图在给定星座点间最小欧氏距离的情况下功率最节省. 这样的设计准则使得使用本文方法设计得到的高维星座图具有很低的误符号率. 同时, 本文算法的复杂度保证了当星座图维度较高或星座点数目较大时仍可适用, 填补了现有文献在这一方面的空白.

参考文献

- [1] Benedetto S, Poggiolini P. Combined amplitude and polarisation shift keying optical coherent modulation [J]. Electronics Letters, 1990, 26(13): 918 – 919.
- [2] Benedetto S, Poggiolini P. Theory of polarization shift keying modulation [J]. Communications, IEEE Transactions on, 1992, 40(4): 708 – 721.
- [3] Benedetto S, Poggiolini P T. Multilevel polarization shift keying: Optimum receiver structure and performance evaluation [J]. Communications, IEEE Transactions on, 1994, 42(234): 1174 – 1186.
- [4] Matalgah M M, Radaydeh R M. Hybrid frequency-polarization shift-keying modulation for optical transmission [J]. Journal of Lightwave Technology, 2005, 23(3): 1152 – 1163.
- [5] Bülow H. Polarization QAM modulation (POL-QAM) for coherent detection schemes [A]. Optical Fiber Communication Conference [C]. San Diego, CA: IEEE, 2009. 1 – 3.
- [6] Andrews M R, Mitra P P. Tripling the capacity of wireless communications using electromagnetic polarization [J]. Nature, 2001, 409(6818): 316 – 318.
- [7] Compton Jr R. The tripole antenna: An adaptive array with full polarization flexibility [J]. Antennas and Propagation, IEEE Transactions on, 1981, 29(6): 944 – 952.
- [8] Turkmani A M D, Arowojolu A A, Jefford P A, et al. An experimental evaluation of the performance of two-branch space and polarization diversity schemes at 1800 MHz [J]. Vehicular Technology, IEEE Transactions on, 1995, 44(2): 318 – 326.
- [9] 钟华, 张志军, 等. 一种三极化共形天线 [J]. 电子学报, 2009, 37(6): 1334 – 1337.
Zhong H, Zhang Z, et al. A conformal tri-polarization antenna [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(6): 1334 – 1337. (in Chinese)
- [10] Nehorai A, Paldi E. Vector-sensor array processing for electromagnetic source localization [J]. Signal Processing, IEEE Transactions on, 1994, 42(2): 376 – 398.
- [11] 宋汉斌. 三维调制解调器的理论研究 [D]. 上海: 复旦大学, 2012.
Song H. Three-dimensional Modulator and Demodulator [D]. Shanghai: Fudan University, 2012.
- [12] Porath J E, Aulin T. Design of multidimensional signal constellations [J]. IEE Proceedings-communications, 2003, 150(5): 317 – 323.
- [13] Agrell E, Karlsson M. Power-efficient modulation formats in coherent transmission systems [J]. Lightwave Technology, Journal of, 2009, 27(22): 5115 – 5126.
- [14] Karlsson M, Agrell E. Spectrally efficient four-dimensional modulation [A]. Optical Fiber Communication Conference [C]. Los Angeles, CA: IEEE, 2012. 1 – 3.
- [15] Beko M, Dinis R. Designing good multi-dimensional constellations [J]. Wireless Communications Letters, IEEE, 2012, 1(3): 221 – 224.
- [16] Sloane N J A, Hardin R H, Duff T D S, et al. Minimal-energy clusters of hard spheres [J]. Discrete & Computational Geometry, 1995, 14(1): 237 – 259.
- [17] Conway J, Sloane N J A. Sphere Packings, Lattices and Groups [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [18] Sloane N J A, Hardin R H, Duff T D S, Conway J. Minimal Energy Clusters, Library of 3-D Clusters, Library of 4-D Clusters [EB/OL]. <http://neilsloane.com/cluster/>, 2013-10-30.
- [19] Forney Jr G D, Wei L F. Multidimensional constellations. I.

Introduction, figures of merit, and generalized cross constellations[J]. Selected Areas in Communications, IEEE Journal on, 1989, 7(6):877 – 892.

[20] Forney Jr G D. Multidimensional constellations. II. Voronoi constellations[J]. Selected Areas in Communications, IEEE Journal on, 1989, 7(6):941 – 958.

[21] Proakis J G, Manolakis D G. Digital Communications[M]. New York: McGraw-Hill, 1995.

[22] Golub G H, Van Loan C F. Matrix Computations[M]. Baltimore, Maryland: Johns Hopkins University Press, 1996.

[23] Pólik I, Terlaky T. Nonlinear Optimization[M]. New York: Springer-Verlag, 2010. 215-276.

作者简介



吴昊 男, 1989 年出生于上海. 2010 年获得上海市复旦大学理学学士学位, 现为上海市复旦大学硕士研究生. 研究方向为高维星座图设计, 高维调制解调系统等.

E-mail: xrqbd1225@126.com



张建秋 男, 1962 年出生于湖南邵阳. 上海市复旦大学电子工程系教授、博士生导师. 主要研究方向为信息处理理论及其在新型传感器和仪器中的应用等.

E-mail: jqzhang@fudan.edu.cn



宋汉斌 男, 1983 年出生于天津. 2006 年、2012 年获得上海市复旦大学工学学士和理学博士学位. 现于上海无线电设备研究所工作. 主要研究方向为信号处理理论, 新型电磁传感器和无线通信等.

E-mail: 081021018@fudan.edu.cn